Lösung Aufgabe 1 / Übungsblatt 4

1.1

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|} \qquad \rightarrow \qquad d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\,\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|} = \frac{\rho_L\,(\underbrace{\vec{a_q}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung der Ladung}})\,\underbrace{dL_q}_{\text{Linienladungs-element}}}{4\pi\,\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|}$$

$$\varphi_L(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\int_{L_q}\frac{\rho_L\,(\vec{a_q})}{\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|}\,dL_q$$

Aufsummieren der Potentialfunktionen aller infinitesimalen Punktladungen mit Hilfe einer Integration führt auf die gesuchte Potentialfunktion einer Linienladung

Zur Berechnung des Integrals muss man sich auf ein bestimmtes Koordinatensystem festlegen

Kartesische Koordinaten

$$\varphi_L(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\rho_L\left(z_q\right)}{\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}}dz_q$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\rho_L\left(z_q\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2zz_q+z_q^2}}dz_q$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\left[\ln\left(2\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_q\right)^2}+2z_q-2z\right)\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\left[\ln\left(2\left(z_2-z+\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_2\right)^2}\right)\right)-\ln\left(2\left(z_1-z+\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_1\right)^2}\right)\right)\right]$$

$$\varphi_L(x,y,z) = \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\ln\left(\frac{z_2-z+\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_2\right)^2}}{z_1-z+\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_1\right)^2}}\right)$$

Zylinderkoordinaten

$$x = r\ \cos\varphi, \qquad y = r\ \sin\varphi, \qquad z = z$$

$$\underline{\underline{\varphi_L(r,\varphi,z) = \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon} \ln\left(\frac{z_2 - z + \sqrt{r^2 + (z - z_2)^2}}{z_1 - z + \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \right)}}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi \\ &= r^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

1.2.1

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\,\varepsilon \left|\vec{r} - \vec{r_q}\right|} = \frac{\rho_A\ (\overrightarrow{a_q})\ dA_q}{4\pi\,\varepsilon \left|\vec{r} - \vec{r_q}\right|}$$

$$\varphi_A(P) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} \iint_{A_q} \frac{\rho_A\ (\overrightarrow{a_q})}{\left|r_p - r_q\right|}\, dA_q$$

Zylindersymmetrisches Problem
$\rightarrow$ Zylinderkoordinatensystem

$$\left.\begin{aligned} \left|\vec{r_p} - \vec{r_q}\right| &= \sqrt{a^2 + (z - z_q)^2} \\ dA_q &= a\ d\varphi\ dz_q \end{aligned}\right\}$$

Bild: „Zylinderanordnung mit Flächenladungsdichte“

$$\varphi_A(P) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_A\ (z_q)}{\sqrt{a^2 + (z - z_q)^2}}\, a\ d\varphi\ dz_q$$

$$= \frac{a}{2\varepsilon} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_A\ (z_q)}{\sqrt{a^2 + (z - z_q)^2}}\, dz_q$$

$$\rho_A(P) = \frac{\rho_A\ a}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{z_2 - z + \sqrt{a^2 + (z - z_2)^2}}{z_1 - z + \sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} \right)$$

1.2.2

$$\phi_v(p)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{z_2}^{z_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\rho_v(\overrightarrow{a_q})}{\sqrt{r^2+(z-z_q)^2}}\,r\,dr\,d\phi\,dz_q$$

Bronstein Integral 193

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi}\rho_v(\overrightarrow{r_q})\sqrt{r^2+(z-z_q)^2}\Bigg]_0^a d\phi\,dz_q$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi}\rho_v(\overrightarrow{r_q})\left(\sqrt{a^2+(z-z_q)^2}-\sqrt{(z-z_q)^2}\right)d\phi\,dz_q$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\rho_v(\overrightarrow{r_q})\left(\sqrt{a^2+(z-z_q)^2}-\sqrt{(z-z_q)^2}\right)dz_q$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\rho_v(\overrightarrow{r_q})\left(\sqrt{a^2+z^2-2zz_q+z_q{}^2}-\sqrt{z^2-2zz_q-z_q{}^2}\right)dz_q$$

Bronstein Integral 245

$$=\frac{\rho_v}{2\varepsilon}\left[\frac{(2z_q-2z)\sqrt{a^2+(z-z_q)^2}}{4}\Bigg|_{z_1}^{z_2}+\frac{a^2}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz_q}{\sqrt{a^2+(z-z_q)}}-\frac{(2z_q-2z)\sqrt{(z-z_q)^2}}{4}\Bigg|_{z_1}^{z_2}\right]$$

$$=\frac{\rho_v}{4\varepsilon}\Bigg[(z_2-z)\sqrt{a^2+(z-z_2)^2}-(z_1-z)\sqrt{a^2+(z-z_1)^2}-(z_2-z)(z-z_2)+(z_1-z)(z-z_1)+$$

$$+a^2\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-z_q)}}dz_q\Bigg]$$

$$\phi_v(p)=\frac{\rho_v}{4\varepsilon}\left[(z_2-z)\left(-(z-z_2)\right)-(z_1-z)\left(\sqrt{a^2+(z-z_1)^2}-(z-z_1)\right)+a^2\ln\left(\frac{z_2-z+\sqrt{a^2+(z-z_2)^2}}{z_1-z+\sqrt{a^2+(z-z_1)^2}}\right)\right]$$

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I
Übung 4

Nebenrechnung Aufgabe 1.1 / Übung 4

Kartesische Koordinaten

$$\varphi_L(x,y,z) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\rho_L\left(z_q\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2\cdot z\cdot z_q+z_q^2}}\,dz_q$$

Bronstein Integraltabelle:

Integral der Form $\sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c}$

$$X = a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} \overset{a>0}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\ln\left(2\cdot\sqrt{a\cdot X}+2\cdot a\cdot x+b\right)+C$$ (Integral 241)

Angewendet:

$$x = z_q;\ a = 1;\ b = -2\cdot z;\ c = x^2+y^2+z^2$$

$$\varphi_L(x,y,z) = \frac{\rho_L}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left[\ln\left(2\cdot\sqrt{x^2+y^2+\left(z-z_q\right)^2}+2\cdot z_q-2\cdot z\right)\right]_{z_q=z_1}^{z_2}$$

Nebenrechnung Aufgabe 1.2.2 / Übung 4

$$\varphi_V(P) = \iiint_V \frac{\rho_V}{\sqrt{r^2 + (z - z_q)^2}} \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz_q$$

Bronstein Integraltabelle:

Integral der Form $X = \sqrt{x^2 + a^2}$ $\quad$ hier : $x = r$

$$\int \frac{x}{\sqrt{X}} dx = \sqrt{X}$$ (Integral 193)

Angewendet:

$$\varphi_V(P) = \int_\varphi \int_{z_q} \rho_V \cdot \left[\sqrt{r^2 + (z - z_q)^2} \right]_{r=0}^{a} d\varphi \, dz_q$$

$$\varphi_V(P) = \int_{z_q = z_1}^{z_2} \rho_V \cdot \left(\sqrt{a^2 + z^2 + 2 \cdot z \cdot z_q + z_q^2} - \sqrt{z^2 + 2 \cdot z \cdot z_q + z_q^2} \right) dz_q$$

Bronstein Integraltabelle:

Integral der Form $X = \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ $\quad$ hier : $x = z_q$

$$\int \sqrt{X} \, dx = \frac{(2 \cdot x + b) \cdot \sqrt{X}}{4 \cdot a} + \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{8 \cdot a} \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{X}}}_{\text{Integral 241}}$$ (Integral 245)

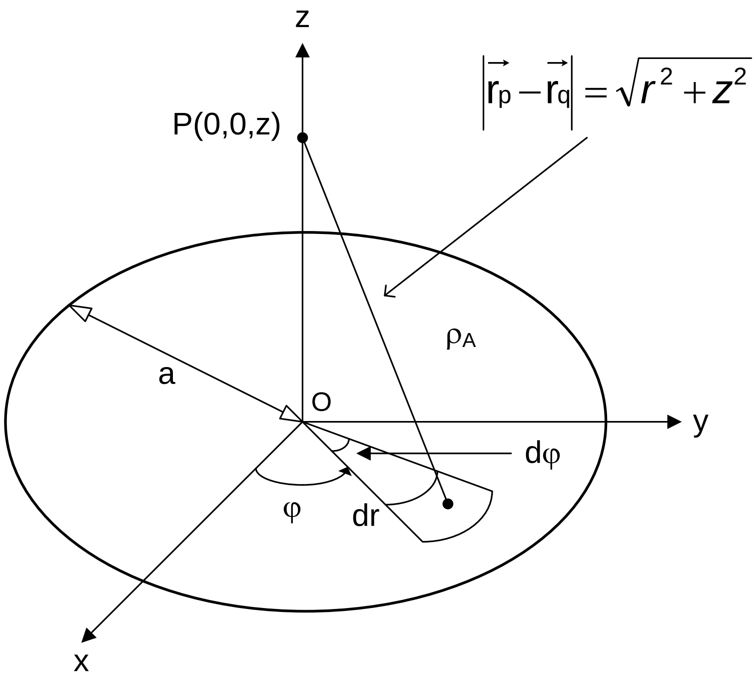
Lösung Aufgabe 2 / Übungsblatt 4

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|}$$

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon(\vec{r}-\vec{r_q})} = \frac{\rho_A(\vec{r}_q)\, dA_q}{4\pi\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|}$$

$$\phi_A(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{A_q} \frac{\rho_A(\vec{r_q})}{4\pi\varepsilon\left|\vec{r_p}-\vec{r_q}\right|}\, dA_q$$

<u>rotationssymmetrisches Problem</u>   <u>Zylinderkoordinatensystem</u>



(Mittelpunkt der Kreisscheibe im Ursprung des Koordinatensystems)

$$\phi_A(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{r=0}^{a} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho_A(\overrightarrow{r_q})}{\sqrt{r^2+z^2}} r\, dr\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{0}^{a} \rho_A(\overrightarrow{r_q}) \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} dr$$

Bronstein Integral 193

$$= \frac{\rho_A}{2\varepsilon} \left[\sqrt{r^2+z^2} \right]_0^a$$

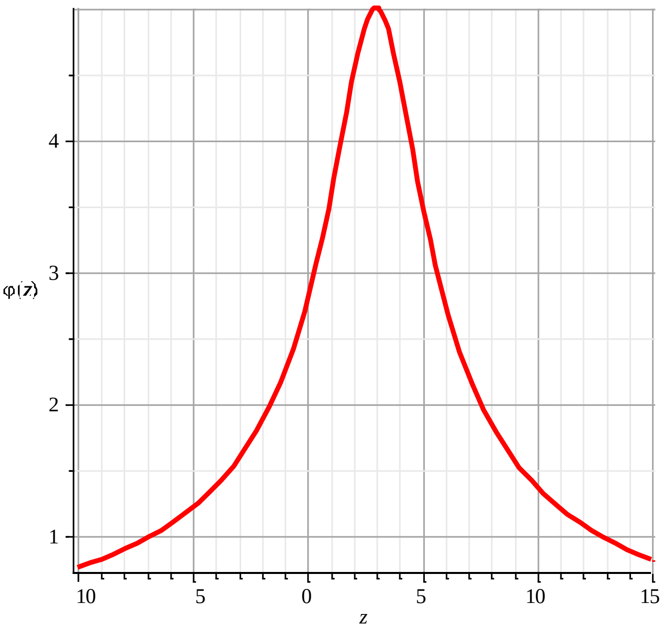
$$\phi_A(p) = \frac{\rho_A}{2\varepsilon}\left(\sqrt{z^2+a^2} - |z|\right) = \phi(z) \qquad \phi_A(p) = \begin{cases} \frac{\rho_A}{2\varepsilon}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right) & \text{für } z > 0 \\ \frac{\rho_A}{2\varepsilon}\left(\sqrt{z^2+a^2} + z\right) & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = -grad\, \phi = -\frac{\delta\phi}{\delta z} \overrightarrow{a_z}$$

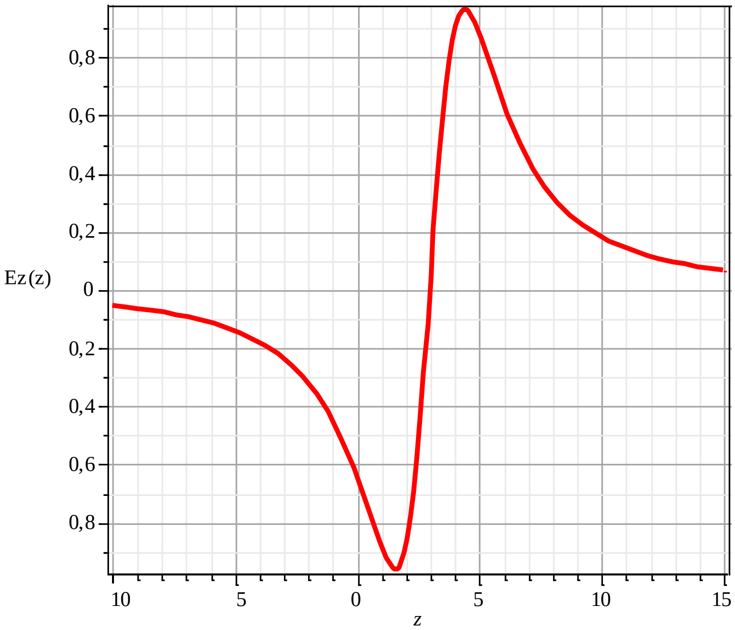
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_A}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\overrightarrow{a_z} & \text{für } z > 0 \\ -\frac{\rho_A}{2\varepsilon}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\overrightarrow{a_z} & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 3.1 / Übungsblatt 4

Potentialfunktion φ(z)

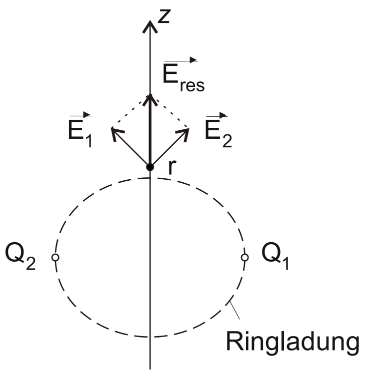


Elektrische Feldstärke $E_z(z)$



Lösung Aufgabe 3.2 / Übungsblatt 4

3.2

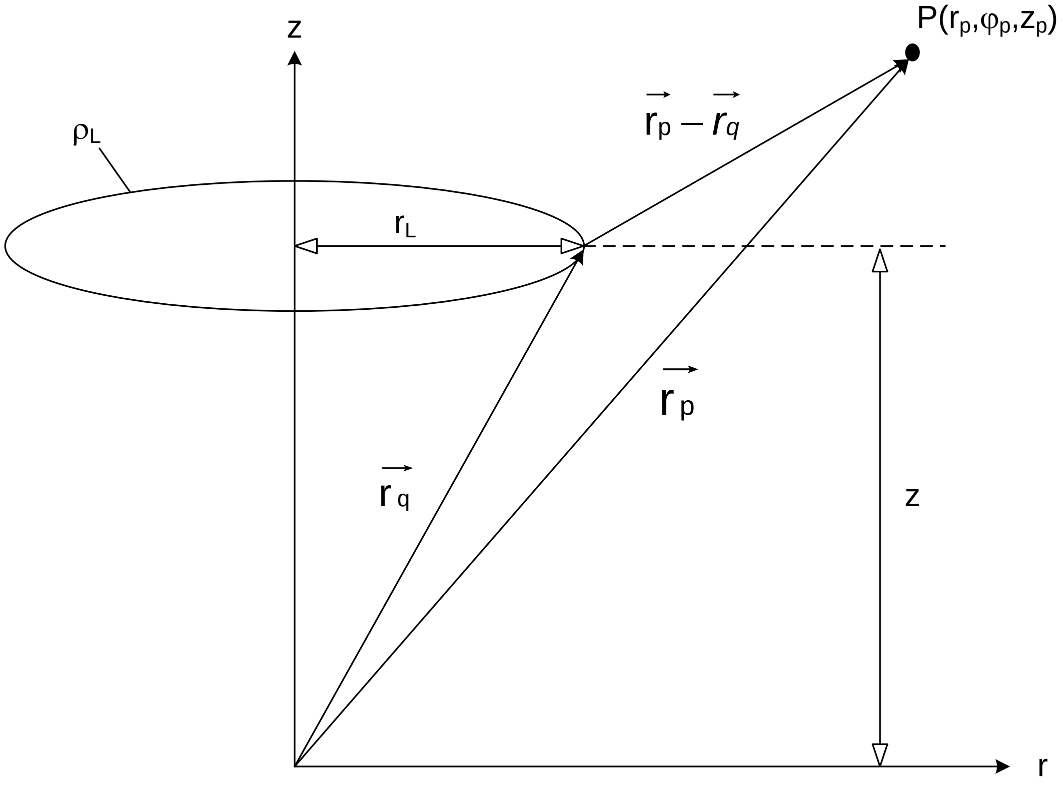


Begründung:

- Überlagerung vieler Punktladungen
- Feldstärkevektor einer Punktladung verläuft radial symmetrisch
- Überlagerung der Felder in einem Punkt der z-Achse

→ ausschließlich Komponenten in z-Richtung

Lösung Aufgabe 3.3 / Übungsblatt 4



Potentialfunktion der Ringladung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{Lq}\frac{\rho_L}{(\vec{r}-\vec{r_q})}dL_q$$

Vektor $(\vec{r}-\vec{r_q})$ in kartesischen Koordinaten x,y,z:

$$(\vec{r}-\vec{r_q}) = \sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2+(z-z_L)^2}$$

Transformation in Zylinderkoordinaten r,ϕ,z:

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$
$$z = z$$

$$(\vec{r}-\vec{r_q}) = \sqrt{(r\cos\phi - r_L\cos\phi_L)^2+(r\sin\phi - r_L\sin\phi_L)^2+(z-z_L)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\phi - 2rr_L\cos\phi\cos\phi_L + r_L{}^2\cos^2\phi_L + r^2\sin^2\phi - 2rr_L\sin\phi\sin\phi_L + r_L{}^2\sin^2\phi_L + (z-z_L)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z-z_L)^2 - 2rr_L(\sin\phi\sin\phi_L + \cos\phi\cos\phi_L)}$$

$$(\vec{r}-\vec{r_q}) = \sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z-z_L)^2 - 2rr_L\cos(\phi-\phi_L)}$$

Aus Symmetriegründen verlaufen die Potentiallinien in konzentrisch zur Ringladung gelegenen Kreisen, so dass $\cos(\phi - \phi_L)$ durch $\cos\phi_L$ ersetzt werden kann (Vereinfachung der Berechnung)!

Mit $dL_q = r_L \, d\phi_L$ folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_L \, r_L}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_L}{\sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z - z_L)^2 - 2rr_L \cos\phi_L}}$$

Zur Berechnung des Integrals substituiert man:

$$\phi_L = \pi - 2v; \quad d\phi_L = -2dv$$

$$\begin{aligned} &\cos(\pi - 2v) \\ &= -\cos 2v \\ &= -(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ &= -(1 - \sin^2 v - \sin^2 v) \\ &= 2\sin^2 v - 1 \end{aligned}$$

und erhält:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_L \, r_L}{4\pi\varepsilon} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-2dv}{\sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z - z_L)^2 - 2rr_L \cos(\pi - 2v)}}$$

mit $\cos(\pi - 2v) = 2\sin^2 v - 1$ folgt:

$$\phi(\vec{r}) \quad = \frac{\rho_L \, r_L}{2\pi\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z - z_L)^2 - 2rr_L \, (2\sin^2 v - 1)}}$$

$$= \frac{\rho_L \, r_L}{2\pi\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{r^2 + r_L{}^2 + (z - z_L)^2 + 2rr_L - 4rr_L \sin^2 v}}$$

$$= \frac{\rho_L \, r_L}{2\pi\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{(r + r_L)^2 + (z - z_L)^2 - 4rr_L \sin^2 v}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_L r_L}{2\pi\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}\sqrt{1-\frac{4rr_L\sin^2 v}{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}}}$$

$$= \frac{\rho_L r_L}{2\pi\varepsilon\sqrt{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-\frac{4rr_L\sin^2 v}{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}}}$$ "gerades Integral"

$$\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{\rho_L r_L}{\pi\varepsilon\sqrt{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}} = \phi(r,z)$$

$$\text{mit } k^2 = \frac{4rr_L}{(r+r_L)^2+(z-z_L)^2}$$

Hinweis: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}$ ist ein elliptisches Integral erster Gattung

(Legendresche Normalform)

(s. Bronstein S. 303; Integrale sind in 1.1.2.4 tabelliert)

Lösung Aufgabe 4 / Übungsblatt 4

Überlagerung der einzelnen Potentialfunktion auf der z-Achse:

Punktladung:

$$\phi_P(z) = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2+(z-z_P)^2}} \qquad x_P = 0; y_P = 0$$

auf der $z-$Achse nur $z-$Komponente

$$\rightarrow \phi_P(z) = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon\sqrt{(z-z_P)^2}}$$

$$E_P(z) = -\frac{\partial \phi_P(z)}{\partial z} = -\frac{Q_P}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_P)}{\left[\sqrt{(z-z_P)^2}\right]^3}\right) = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon}\frac{(z-z_P)}{(z-z_P)^3}$$

Ringladung:

$$\phi_L(z) = \frac{\rho_L r_L}{2\varepsilon\sqrt{r_L{}^2+(z-z_L)^2}} = \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon\sqrt{r_L{}^2+(z-z_L)^2}}; \quad \rho_L = \frac{Q_L}{2\pi r_L}$$

(vgl. Aufgabe 3.1)

$$E_L(z) = -\frac{\partial \phi_L(z)}{\partial z} = +\frac{Q_L}{4\pi\varepsilon}\frac{z-z_L}{\left[\sqrt{r_L{}^2+(z-z_P)^2}\right]^3}$$

Flächenladung:

$$\phi_A(z) = \frac{\rho_A r_A}{2\varepsilon}\ln\left(\frac{z_2-z+\sqrt{r_A{}^2+(z-z_2)^2}}{z_1-z+\sqrt{r_A{}^2+(z-z_1)^2}}\right); \qquad \rho_A = \frac{Q_A}{2\pi r_A(z_2-z_1)}$$

(vgl. Aufgabe 1.2)

$$\phi_A(z) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(z_2-z_1)}\ln\left(\frac{z_2-z+\sqrt{r_A{}^2+(z-z_2)^2}}{z_1-z+\sqrt{r_A{}^2+(z-z_1)^2}}\right)$$

$$E_A(z) = -\frac{\partial \phi_A(z)}{\partial z}$$

$$E_A(z) = -\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(z_2 - z_1)} \frac{1}{z_2 - z + \sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2}} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{2(z - z_2)}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2}} \right) +$$

$$+ \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(z_2 - z_1)} \frac{1}{z_1 - z + \sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2}} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{2(z - z_1)}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2}} \right)$$

$$E_A(z) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(z_2 - z_1)} \left(-\frac{\dfrac{-\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2} + (z - z_2)}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2}}}{z_2 - z + \sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2}} + \frac{\dfrac{-\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2} + (z - z_1)}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2}}}{z_1 - z + \sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2}} \right)$$

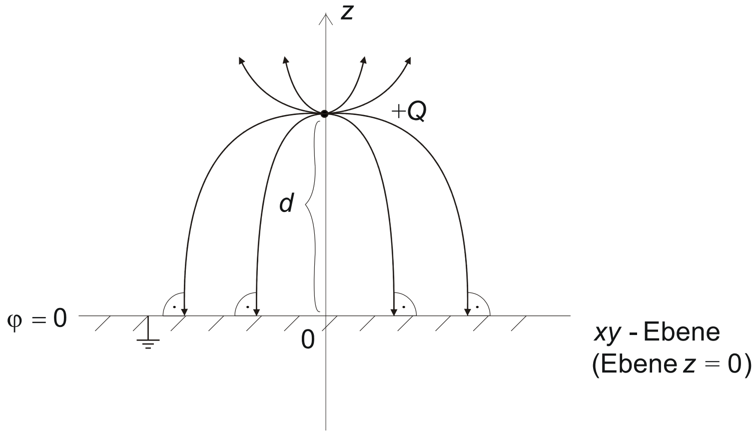
$$E_A(z) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon(z_2 - z_1)} \left(\frac{1}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_A{}^2 + (z - z_1)^2}} \right)$$

$$\vec{E}_{ges}(z) = \left(E_P(z) + E_L(z) + E_A(z) \right) \vec{a}_Z$$

Lösung Aufgabe 5 / Übung 4

5.1

Anordnung / Feldlinienbild



Potential der Punktladung ohne geerdete Metallplatte

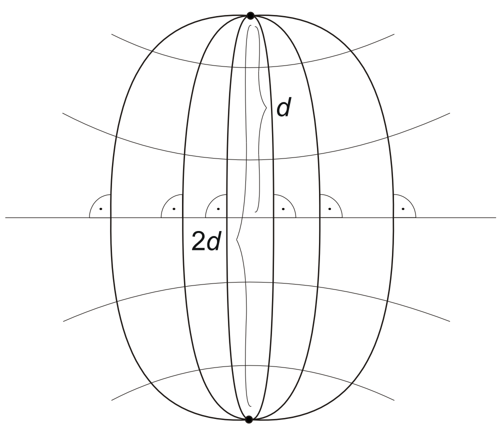
$$\varphi_{+Q}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

Auf der geerdeten Metallplatte muss die Bedingung $\varphi = 0$ erfüllt sein!

für $z = 0$ gilt $\varphi_{+Q}(x,y,0) = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \neq 0$

$\varphi_{+Q}(x,y,0) = 0$ nur für $x \to \infty$ bzw. $y \to \infty$ erfüllt

Betrachtung der Anordnung zweier Punktladungen im Abstand $2d$



Gleiches Feldbild wie unter 1

$\Rightarrow$ Die Anordnung Punktladung / geerdete Metallplatte im Abstand d lässt sich auf die Anordnung zweier Punktladungen im Abstand $2d$ zurückführen. Dabei wird die geerdete Metallplatte als Symmetrieebene bzw. Äquipotentialfläche mit dem Potential $\varphi = 0$ aufgefasst und eine zweite Punktladung $(-Q)$ als Spiegelbild ergänzt.

Potentialfunktion der Anordnung Punktladung / geerdete Metallplatte

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_{+Q} + \varphi_{-Q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

gültig für $z \geq 0$
(reales Gebiet)

für $z = 0$ gilt $\varphi(x,y,0) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}\right] = 0$

$$\vec{E}(x,y,z) = -grad\ \varphi(x,y,z)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}\right]^3}(x\vec{a_x}+y\vec{a_y}+(z-d)\vec{a_z})+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}\right]^3}(x\vec{a_x}+y\vec{a_y}+(z+d)\vec{a_z})\right]$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}\right]^3}-\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}\right]^3}\right)x\vec{a_x}\right.$$

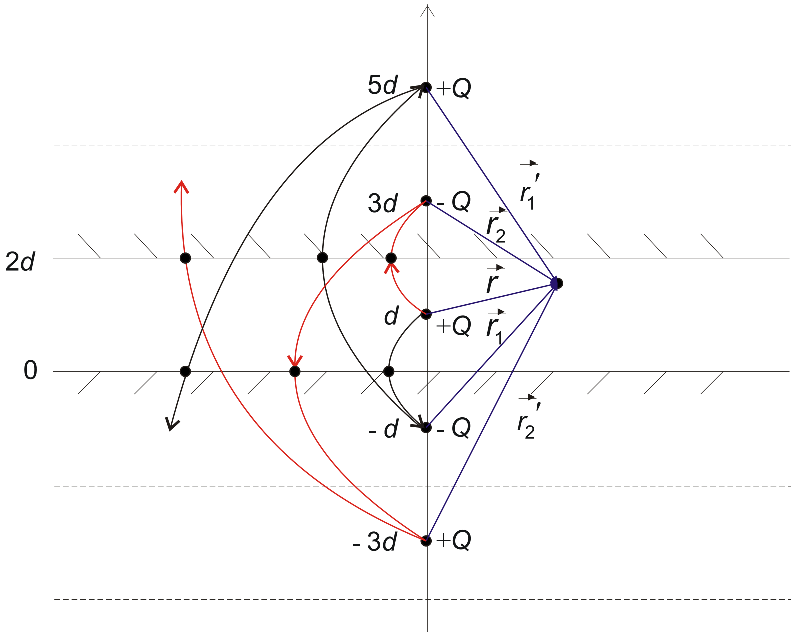
$$+\left(\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}\right]^3}-\frac{1}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}\right]^3}\right)y\vec{a_y}$$

$$\left.+\left(\frac{z-d}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}\right]^3}-\frac{z+d}{\left[\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}\right]^3}\right)\vec{a_z}\right]$$

Regeln für die Spiegelungsmethode

- Bildladungen grundsätzlich jenseits der Spiegelebene, nicht im tatsächlich betrachteten Feldraum
- Potential auf einer leitenden Fläche ist konstant (oder Null)
- Feldstärke steht senkrecht auf leitender Fläche

5.2



$$\varphi(P)=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}-\frac{1}{|\vec{r}_1|}+\frac{1}{|\vec{r}_1'|}-\frac{1}{|\vec{r}_1''|}+\cdots-\frac{1}{|\vec{r}_2|}+\frac{1}{|\vec{r}_2'|}-\frac{1}{|\vec{r}_2''|}+\cdots\right)$$

$$\varphi(P)=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}-\frac{1}{|\vec{r}_1|}-\frac{1}{|\vec{r}_2|}+\frac{1}{|\vec{r}_1'|}+\frac{1}{|\vec{r}_2'|}-\frac{1}{|\vec{r}_1''|}-\frac{1}{|\vec{r}_2''|}+\cdots\right)$$

mit $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$

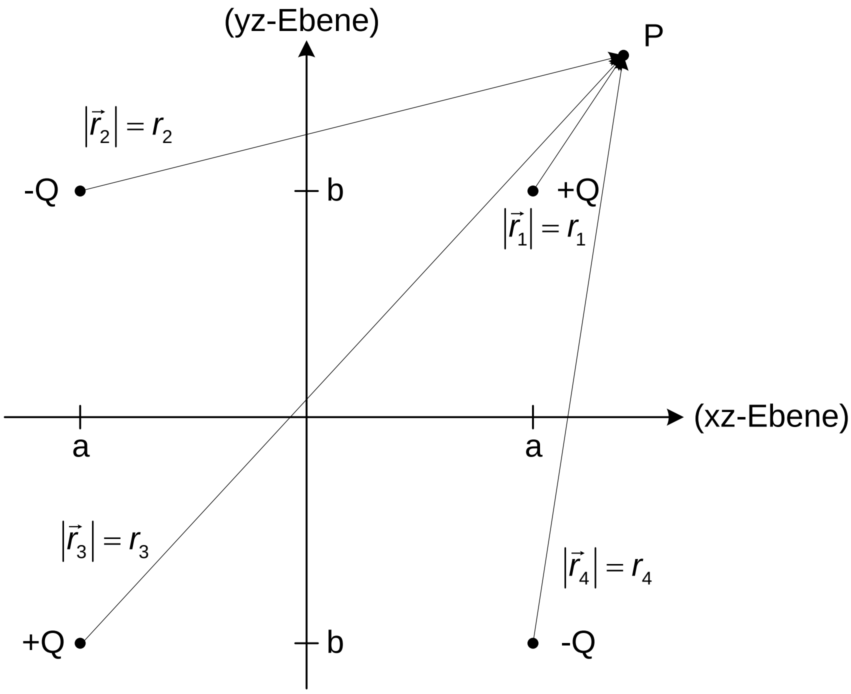
$$|\vec{r}_1|=\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}$$

$$|\vec{r}_2|=\sqrt{x^2+y^2+(z-3d)^2}$$

$$|\vec{r}_2'|=\sqrt{x^2+y^2+(z+3d)^2}$$

$$|\vec{r}_1'|=\sqrt{x^2+y^2+(z-5d)^2}$$

Lösung Aufgabe 6 / Übungsblatt 4



$$\varphi(p) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{|\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}_3|} - \frac{1}{|\vec{r}_4|}\right);\ x > 0,\ \ y > 0$$

$$\text{mit } |\vec{r}_1| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}$$

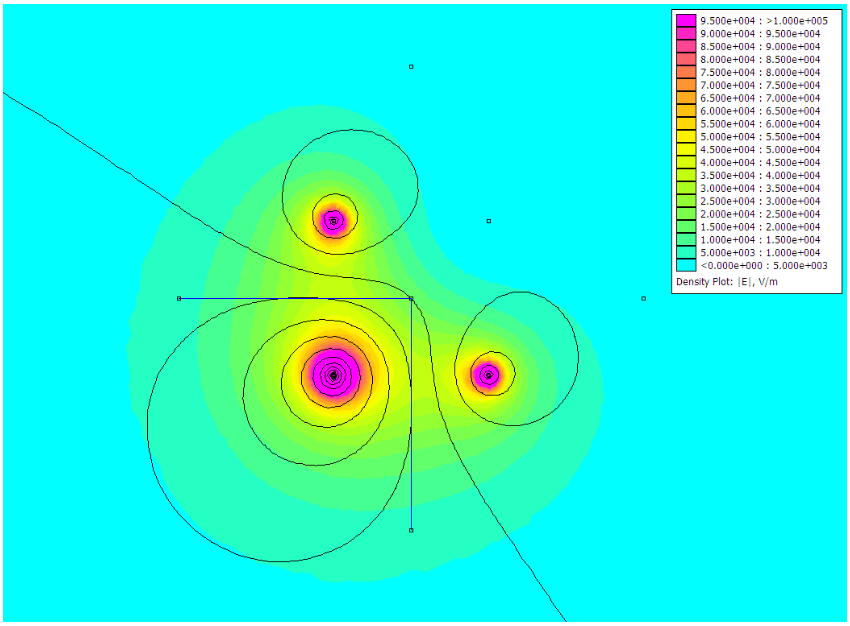
$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}$$

$$|\vec{r}_3| = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}$$

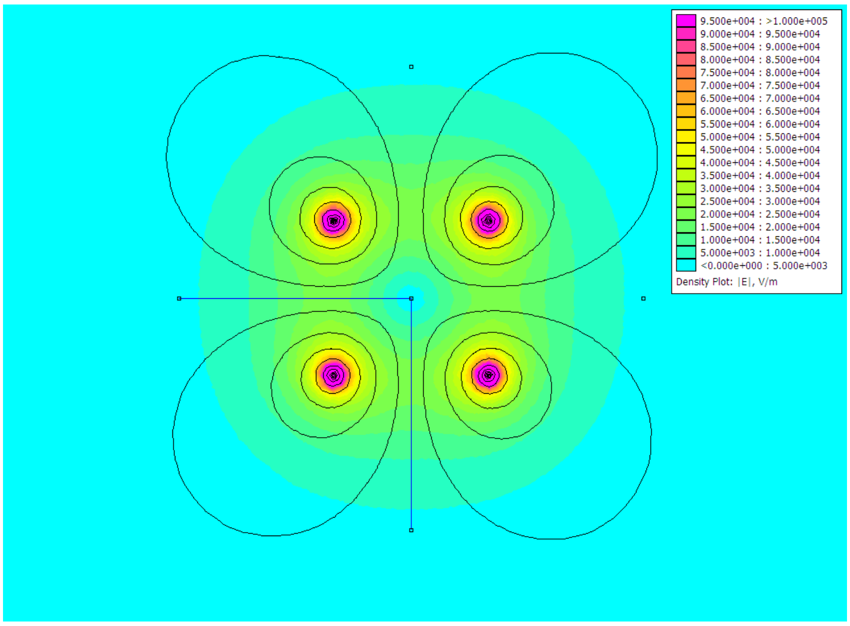
$$|\vec{r}_4| = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}$$

Feldberechnung Aufgabe 6 / Übungsblatt 4

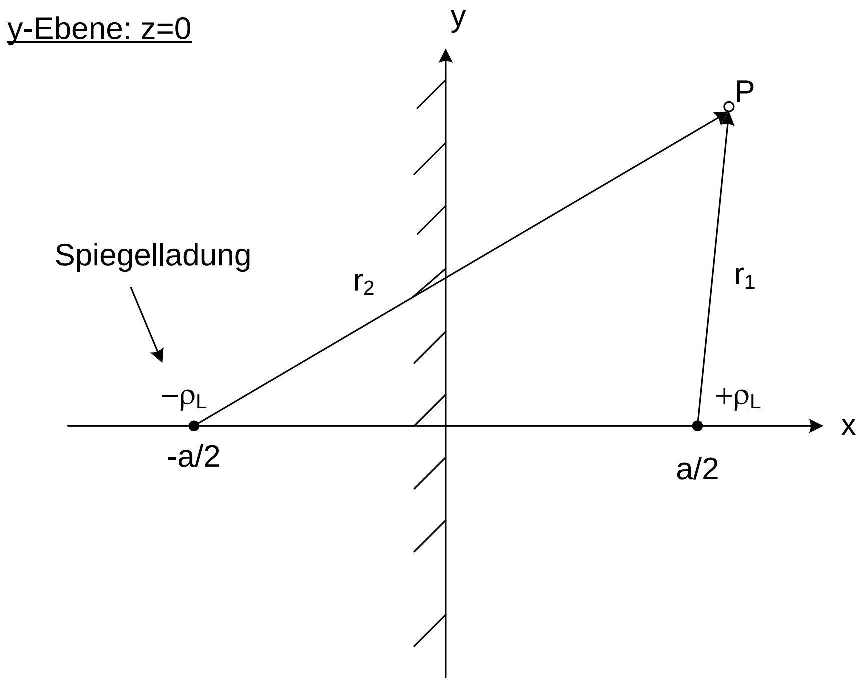
Ansatz A: E-Feld und Äquipotentiallinien



Ansatz B: E-Feld und Äquipotentiallinien



Lösung Aufgabe 7 / Übungsblatt 4



Lösungsweg identisch mit Übungsblatt 1 / Aufgabe 5 (2 parallele Linienladung)

$$\phi(p) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln(r) \text{ (allgemeine Linienladung)}$$

mit Metallplatte:

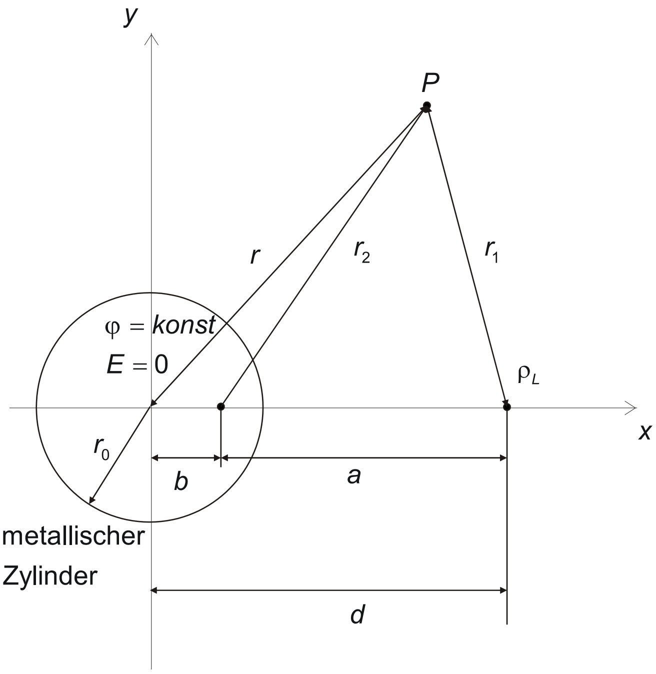
$$\phi(p) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

mit $\quad r_1 = \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$

folgt

$$\phi(x,y,0) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}}\right) \text{ für } x > 0!$$

Lösung Aufgabe 8 / Übungsblatt 4



Bei nicht vernachlässigbarem Leiterquerschnitt kann der Leiter nicht durch eine Linienladung im Zentrum des Leiters nachgebildet werden.

Spiegelladung $-\rho_L$ innerhalb des metallischen Zylinders.
Position?

Potentialverteilung außerhalb durch Überlagerung der beiden Linienladungen

$$\Rightarrow \qquad \varphi(P) = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln\frac{r_2}{r_1} \qquad \text{mit} \qquad r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2r\,d\cos\varphi}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2r\,b\cos\varphi} \qquad \text{Kosinussatz}$$

$$\varphi(r,\varphi) = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln\sqrt{\frac{r^2 + b^2 - 2r\,b\cos\varphi}{r^2 + d^2 - 2r\,d\cos\varphi}}$$

$\varphi = konst$
$E = 0$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon} \ln\frac{r^2 + b^2 - 2r\,b\cos\varphi}{r^2 + d^2 - 2r\,d\cos\varphi}$$

Auf der metallischen Oberfläche ist das Potential konstant, d.h. die Potentialverteilung / -funktion ist auf der Oberfläche vom Winkel φ unabhängig

$$\varphi(r_0,\varphi) = \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\ln\left(\frac{r_0^{\,2}+b^2-2r_0\,b\cos\varphi}{r_0^{\,2}+d^2-2r_0\,d\cos\varphi}\right) = \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\ln\left(\frac{2r_0\,b\left(\dfrac{r_0^{\,2}+b^2}{2r_0\,b}-\cos\varphi\right)}{2r_0\,d\left(\dfrac{r_0^{\,2}+d^2}{2r_0\,d}-\cos\varphi\right)}\right)$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\ln\left(\frac{\dfrac{r_0^{\,2}+b^2}{2r_0\,b}-\cos\varphi}{\dfrac{r_0^{\,2}+d^2}{2r_0\,d}-\cos\varphi}\,\frac{b}{d}\right)$$

$\varphi(r,\varphi)$ ist unabhängig von φ für

$$\frac{r_0^{\,2}+b^2}{2r_0\,b} = \frac{r_0^{\,2}+d^2}{2r_0\,d}; \qquad\qquad b = \frac{r_0^{\,2}}{d}$$

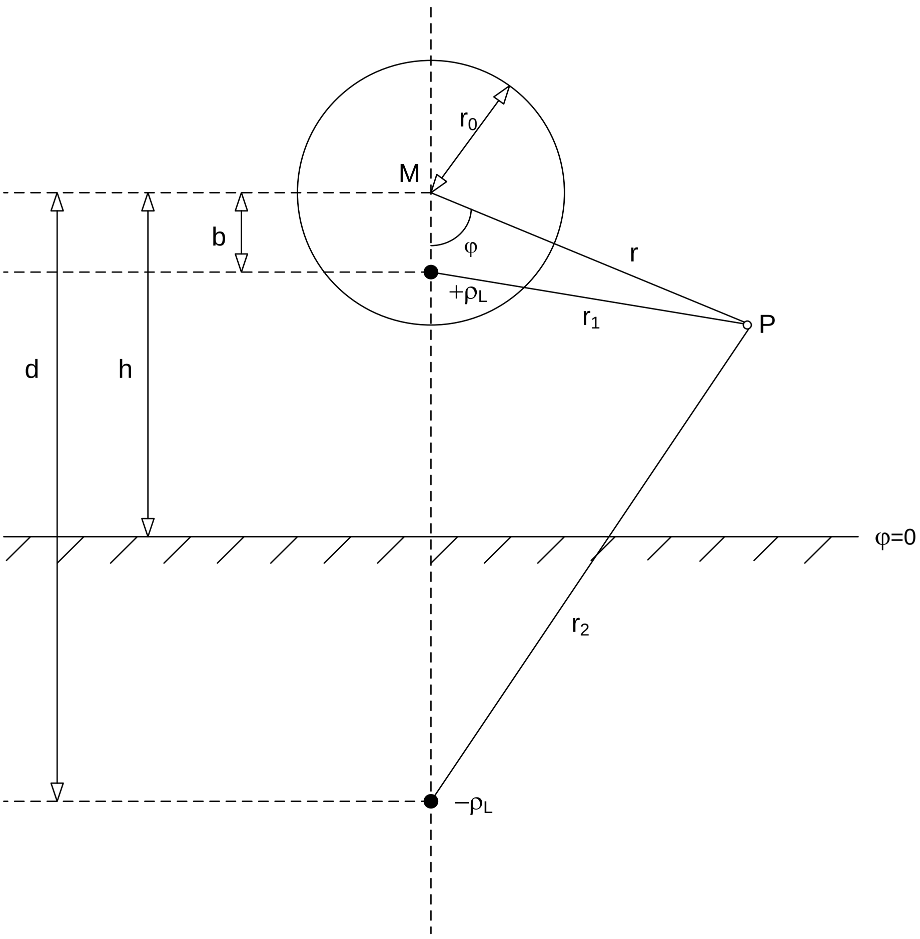
$\uparrow$

Positionierungsvorschrift für Spiegelladungen in rotationssymmetrischer Anordnung

$$\varphi(P) = \varphi(r,\varphi) = \frac{\rho_L}{4\pi\,\varepsilon}\ln\left(\frac{r^{\,2}+\dfrac{r_0^4}{d^2}-2r\,\dfrac{r_0^2}{d}\cos\varphi}{r^{\,2}+d^2-2r\,d\cos\varphi}\right)$$

Potential in einem beliebigen Punkt P (außerhalb des metallischen Zylinders)

Lösung Aufgabe 9 / Übungsblatt 4



Vorgehensweise:

1. Linienladung $+\rho_L$ innerhalb des Leiters setzen.
   (Bei nicht vernachlässigbarem Leiterquerschnitt kann der Leiter nicht durch eine Linienladung im Zentrum des Leiters modelliert werden)

2. Spiegelladung $-\rho_L$ in der Spiegelebene positionieren
   (Ebene φ=0 ist Äquipotentialfläche der beiden Linienladungen!)

9.1

Potential an der Leiteroberfläche (vgl. Aufgabe 8)

$$\phi(r_0) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{b}\right) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{d^2}{r_0^{\,2}}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

$$b = \frac{r_0^{\,2}}{d}$$

es gilt: $2h = d + b \leftrightarrow h = \frac{1}{2}(d+b);\ b = \frac{r_0^{\,2}}{d},$

so daß

$$\phi(r_0) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2 - r_0^{\,2}}}{r_0}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{h}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1}\right) \stackrel{!}{=} U$$

Kapazitätsbelag C' der Anordnung

$$C' = \frac{\rho_L}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{h}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1}\right)}$$

9.2

Feldstärke

$$\vec{E} = -grad\,\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\vec{a}_\phi = E_r\vec{a}_r + E_\phi\vec{a}_\phi$$

$$\Phi(r,\phi) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r^2 + d^2 - 2rd\cos\phi}{r^2 + \frac{r_0^{\,4}}{d^2} - 2r\frac{r_0^{\,2}}{d}\cos\phi}\right)$$

$$\Phi(r,\phi) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\left[\ln\left(r^2 + d^2 - 2rd\cos\phi\right) - \ln\left(r^2 + \frac{r_0^{\,4}}{d^2} - 2r\frac{r_0^{\,2}}{d}\cos\phi\right)\right]$$

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{2r - 2d\cos\phi}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\phi} - \frac{2r - 2\frac{r_0^{\ 2}}{d}\cos\phi}{r^2 + \frac{r_0^{\ 4}}{d^2} - 2r\frac{r_0^{\ 2}}{d}\cos\phi}\right]$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{r - \frac{r_0^{\ 2}}{d}\cos\phi}{r_1^{\ 2}} - \frac{r - d\cos\phi}{r_2^{\ 2}}\right]$$

$$E_P = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \quad = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\cancel{r}}\left[\frac{2\cancel{r}d\sin\phi}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\phi} - \frac{2\cancel{r}\frac{r_0^{\ 2}}{d}\sin\phi}{r^2 + \frac{r_0^{\ 4}}{d^2} - 2r\frac{r_0^{\ 2}}{d}\cos\phi}\right]$$

$$-\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{\frac{r_0^{\ 2}}{d}\sin\phi}{r_1^{\ 2}} - \frac{d\sin\phi}{r_2^{\ 2}}\right]$$

<u>maximale Feldstärke an der Leiteroberfläche:</u> $\frac{\partial \vec{E}(r = r_0)}{\partial \phi} = 0$

Die Auswertung dieser Beziehung fehlt auf

$\frac{\partial E_r(r = r_0)}{\partial \phi} = 0$ für $\phi = 0$

bzw.

$\frac{\partial E_P(r = r_0)}{\partial \phi} = 0$ für alle ϕ

(direkt an der Leiteroberfläche existiert außschließlich eine
r –Komponente des elektrischen Felds!
radialsymmetrisches elektrisches Feld)

Für die maximale Feldstärke an der Oberfläche des Leiters folgt somit:

$$\vec{E}_{\max}(r = r_0) = \vec{E}(r = r_0, \phi = 0)$$

$$E_r(r_0, 0) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{r_0 - \frac{r_0^{\,2}}{d}}{r_0^{\,2} + \frac{r_0^{\,4}}{d^2} - 2\frac{r_0^{\,3}}{d}} - \frac{r_0 - d}{r_0^{\,2} + d^2 - 2r_0 d}\right]$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{\frac{d^2}{r_0} - d}{d^2 + r_0^{\,2} - 2dr_0} + \frac{-r_0 + d}{r_0^{\,2} + d^2 - 2r_0 d}\right]$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{\frac{d^2}{r_0} - r_0}{(d - r_0)^2}\right]; \qquad \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} = \frac{U}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

$$= \frac{U}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}\left[\frac{1}{r_0}\frac{\left(d^2 - r_0^{\,2}\right)}{(d - r_0)^2}\right]$$

$$= \frac{U}{r_0 \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}\left[\frac{\cancel{(d - r_0)}\,(d + r_0)}{(d - r_0)^{\cancel{2}}}\right]$$

$$E_r(r_0, 0) = \frac{U}{r_0 \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}\frac{d + r_0}{d - r_0}$$

$$E_\phi(r_0, 0) = 0$$

$$\vec{E}_{\max}(r = r_0) = \frac{U}{r_0 \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}\frac{d + r_0}{d - r_0}\vec{a}_r$$